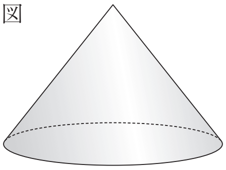
第24講　円錐・球

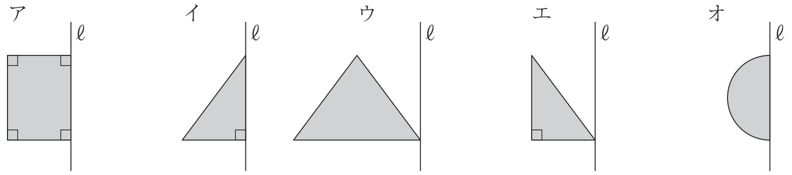
Step 1

1　図のように，底面の半径が 3 cm で，高さが 4 cm の円錐がある。

図



① 円錐は，ある平面図形を直線のまわりに 1 回転させてできる立体とみることができる。直線 ℓ を回転の軸として 1 回転させたとき，円錐ができる図形として正しいものを，次のア～オから 1 つ選び，記号を書きなさい。

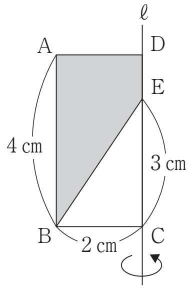


② 図の円錐の体積を求めなさい。ただし，円周率は π とする。

③ 図の円錐の側面となるおうぎ形の半径と，中心角の大きさを求めなさい。

【長野県】

2　右の図は，AB = 4 cm，BC = 2 cm の長方形 ABCD で，辺 CD 上に点 E を，CE = 3 cm となるようにとったものである。線分 CD を延長した直線 ℓ を軸として，色をつけた部分（▭）を 1 回転させてできる立体の体積は何 cm^3 か。ただし，円周率は π とする。

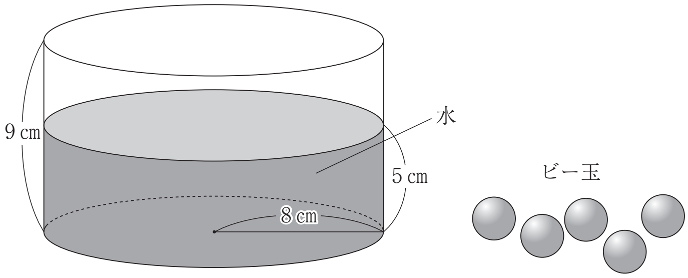


【鹿児島県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　底面の半径が8cm，高さが9cmの円柱の形をした容器を水平な台に置き，下の図のように底から5cmの高さまで水を入れた。次の問いに答えなさい。

ただし，円周率はπとし，容器の厚さは考えないものとする。



(1)　容器に入っている水の体積を求めなさい。

(2)　この容器に，半径が1cmの球の形をしたビー玉を，静かに何個か沈めたところ，水面がちょうど1cm上昇した。沈めたビー玉の個数を求めなさい。

ただし，沈めたビー玉は全体が水中に収まっているものとする。

【山形県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

Step　2

4　鉄でできた円錐の形をしたおもりがある。図１のようにおもりを倒し，すべらないように平面上を転がしたところ，おもりは５回転して半径10cmの円をちょうど３周した。

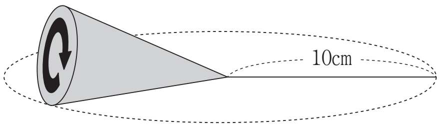


図１

このとき，次の各問いに答えなさい。ただし，円周率はπとする。

問１　半径10cmの円の円周の長さを求めなさい。

問２　このおもりの底面の半径を求めなさい。

問３　水が入っている円柱の形をした水そうがあり，水の高さは２cmである。ここに図１のおもりを図２のように入れると，水の高さが最初の高さの２倍になった。この水そうの底面の半径を求めなさい。ただし，水そうの厚みは考えないものとする。

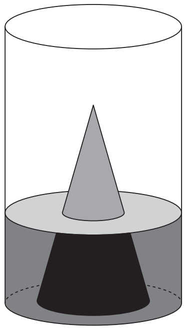
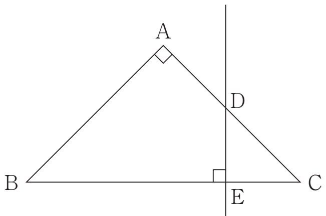


図２

【沖縄県】

5　図で，△ABCはAB ＝ ACの直角二等辺三角形で，Dは辺ACの中点であり，Eは辺BC上の点で，∠DEB ＝ 90°である。

BC ＝ 4cmのとき，次の①，②の問いに答えなさい。



①　線分BEを，直線DEを回転の軸として１回転させてできる図形の面積は何cm^2か，求めなさい。

②　四角形ABEDを，直線DEを回転の軸として１回転させてできる立体の体積は何cm^3か，求めなさい。

【愛知県】

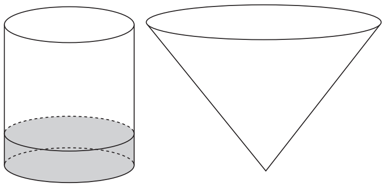
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

Step　3

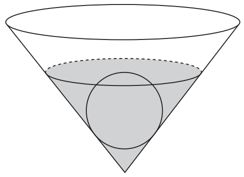
6　図Ⅰで，A は水が入った円柱の容器，B は円すい形の空の容器で，A，B ともに底面が水平になるように置いてある。容器 A の水を容器 B にすべて入れ，その中に球の形をしたおもりを入れたところ，図Ⅱのように，ちょうど球が水面にかくれた。

容器 A の底面の半径が 5 cm，容器 B の底面の半径が 9 cm，高さがともに 12cm，球の半径が 3 cm のとき，次の①，②の問いに答えなさい。ただし，容器の厚さは考えないものとする。

図Ⅰ



図Ⅱ



①　球の体積は何 cm^3 か，求めなさい。

②　図Ⅰの容器 A の水面の高さは何 cm か，求めなさい。

【愛知県】

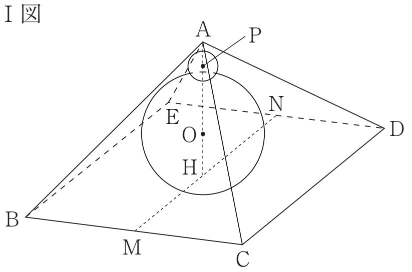
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

7　次のⅠ図のように，底面の１辺が６cm，高さが$\sqrt{7}$cmの正四角錐(すい)A―BCDEがあり，２辺BC，DEの中点をそれぞれM，Nとし，線分MNの中点をHとする。また，線分AH上に２点O，Pがあり，正四角錐の内部に，点Oを中心とする球と点Pを中心とする球がある。

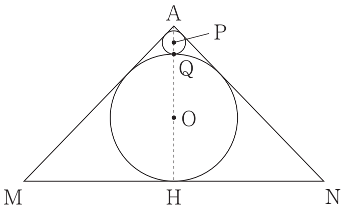
次のⅡ図は，この立体を３点A，M，Nを通る平面で切った切り口を表している。Ⅱ図中の円Oは△AMNの各辺と接していて，円Pは２辺AM，ANと接している。また，２円O，Pは線分AH上の点Qを通り，点Qにおける円Oの接線と円Pの接線は同じ直線である。

このとき，あとの問い(1)～(3)に答えよ。

Ⅰ図



Ⅱ図



(1)　辺ABの長さを求めよ。また，正四角錐の表面積を求めよ。

(2)　点Oを中心とする球の半径を求めよ。

(3)　点Oを中心とする球の体積と点Pを中心とする球の体積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

【京都府】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

〈 ***Note*** 〉

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製·転載を禁止します。

第24講　円錐・球

Step　1

1　① イ　② 12π (cm^3)　③（半径）5 (cm)　（中心角）216°

≪解説≫

② $\frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi$ (cm^3)

③ 円錐の側面となるおうぎ形の半径は円錐の母線の長さで，三平方の定理より，$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (cm)　おうぎ形の中心角を x° とすると，おうぎ形の弧の長さは底面の円周と等しいから，$2\pi \times 5 \times \frac{x}{360} = 2\pi \times 3$ が成り立つ。これを解いて，$x = 216$

2　12π (cm^3)

≪解説≫

長方形 ABCD を直線 ℓ を軸として 1 回転させてできる立体は円柱で，その体積は，$\pi \times 2^2 \times 4 = 16\pi$ (cm^3)　また，△BCE を同様に回転させてできる立体は円すいで，その体積は，$\frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 3 = 4\pi$ (cm^3)　よって，求める体積は，$16\pi - 4\pi = 12\pi$ (cm^3)

3　(1) 320π (cm^3)　(2) 48 (個)

≪解説≫

(1) $\pi \times 8^2 \times 5 = 320\pi$ (cm^3)

(2) 容器に入れたビー玉全部の体積の和は，$\pi \times 8^2 \times 1 = 64\pi$ (cm^3)　半径 1 cm のビー玉 1 個の体積は，$\frac{4}{3} \times \pi \times 1^3 = \frac{4}{3}\pi$ (cm^3) なので，容器に入れたビー玉は，$64\pi \div \frac{4}{3}\pi = 48$ (個)

Step　2

4　問 1.　20π (cm)　問 2.　6 (cm)　問 3.　$\sqrt{42}$ (cm)

≪解説≫

問 1.　$2\pi \times 10 = 20\pi$ (cm)

問 2.　おもりの底面の円周の長さは，$20\pi \times 3 \times \frac{1}{5} = 12\pi$ (cm) だから，おもりの底面の半径を r cm とすると，$2\pi r = 12\pi$ が成り立つ。これを解くと。$r = 6$

問 3.　円錐の高さは三平方の定理より，OP $= \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (cm)　図 2 において，水の深さは，$2 \times 2 = 4$ (cm) だから，円錐のうち，水面から出ている部分の高さは，$8 - 4 =$

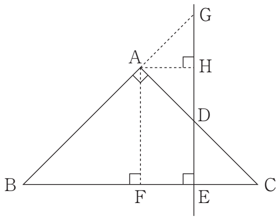
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

$4\,(\mathrm{cm})$　また，円錐全体と水面から出ている部分は相似になり，相似比は高さの比と等しく，$8:4=2:1$ なので，体積比は，$2^3:1^3=8:1$　これより，円錐全体と水に沈んでいる部分との体積比は，$8:(8-1)=8:7$　円錐の体積は，$\dfrac{1}{3}\times\pi\times6^2\times8=96\pi\,(\mathrm{cm}^3)$ だから，水に沈んでいる部分の体積は，$96\times\dfrac{7}{8}=84\pi\,(\mathrm{cm}^3)$ で，この体積が水そう，$4-2=2\,(\mathrm{cm})$ 分の体積と等しい。よって，水そうの底面の半径を $x\,\mathrm{cm}$ とすると，$\pi\times x^2\times2=84\pi$ が成り立つので，これを解くと，$x=\pm\sqrt{42}$　$x>0$ より，$x=\sqrt{42}$

5　① $9\pi\,(\mathrm{cm}^2)$　② $\dfrac{25}{3}\pi\,(\mathrm{cm}^3)$

≪解説≫

① 右図のように，BC の中点を F とすると，BF = FC = 2 cm で，DE ∥ AF より，FE : EC = AD : DC = 1 : 1 なので，FE = EC = 1 cm　よって，BE = BF + FE = 2 + 1 = 3 (cm)　求める面積は，半径が BE の円の面積になるので，$\pi\times3^2=9\pi\,(\mathrm{cm}^2)$



② 上図のように，直線 AB と直線 DE の交点を G とし，A から直線 DE に垂線をひいて交点を H とすると，△GAH と△DAH は合同な直角二等辺三角形なので，求める立体の体積は，△GBE を回転してできる円すいの体積から，△GAH を回転してできる円すいの体積の 2 倍をひけばよい。△GBE は直角二等辺三角形なので，GE = BE = 3 cm　また，AH = FE = 1 cm なので，GH = AH = 1 cm　よって，$\dfrac{1}{3}\times9\pi\times3-\left\{\dfrac{1}{3}\times(\pi\times1^2)\times1\right\}\times2=\dfrac{25}{3}\pi\,(\mathrm{cm}^3)$

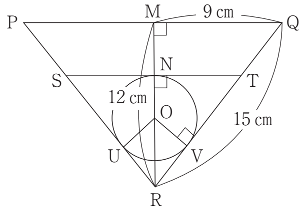
Step　3

6　① $36\pi\,(\mathrm{cm}^3)$　② $\dfrac{12}{5}\,(\mathrm{cm})$

≪解説≫

① 半径 3 cm の球の体積は，$\dfrac{4}{3}\times\pi\times3^3=36\pi\,(\mathrm{cm}^3)$

② B の容器は，底面が半径 9 cm の円，高さが 12cm の円すいだから，母線の長さは，$\sqrt{9^2+12^2}=15\,(\mathrm{cm})$　図Ⅱの円すいを底面の直径を含む平面で，底面と垂直に切った切断面は右図のようになり，△QMR は，QM : MR : RQ = 9 : 12 : 15 = 3 : 4 : 5　△OVR ∽△QMR より，$\mathrm{RO}=\dfrac{5}{3}\mathrm{OV}=\dfrac{5}{3}\times3=5\,(\mathrm{cm})$　よって，NR = 3 + 5 = 8 (cm)　また，△TNR ∽△QMR も言えるか



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

ら，$TN = \frac{3}{4}NR = \frac{3}{4} \times 8 = 6$ (cm)　よって，水が入っている部分の円すいの体積は，$\frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 8 = 96\pi$ (cm^3)　このうち，球の体積が 36πcm^3 だから，容器Aの水の体積は，$96\pi - 36\pi = 60\pi$ (cm^3)となる。よって，容器Aの水面の高さを $h$cm とすると，$\pi \times 5^2 \times h = 60\pi$ より，$h = \frac{12}{5}$

7　(1) (AB =) 5 (cm)　(表面積) 84 (cm^2)　(2) $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ (cm)

(3) (点Oを中心とする球の体積：点Pを中心とする球の体積＝) 343：1

≪解説≫

(1) $BD = \sqrt{2}BC = 6\sqrt{2}$ (cm)，$BH = \frac{1}{2}BD = 3\sqrt{2}$ (cm)　△ABHは直角三角形だから，三平方の定理より，$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + (3\sqrt{2})^2} = 5$ (cm)　また，△ABCは二等辺三角形で点MはBCの中点だから，$\angle AMB = 90°$ となり，$BM = \frac{1}{2}BC = 3$ (cm)より，△ABMで，$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (cm)　よって，正四角錐の表面積は，$6^2 + \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 4\right) \times 4 = 84$ (cm^2)

(2) $\triangle AMN = \frac{1}{2} \times MN \times AH = \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$ (cm^2)　球Oの半径を $t$cm とすると，Ⅱ図において，△AMO，△MNO，△NAOの底辺をAM，MN，NAとしたときの高さはすべて $t$cm なので，$\triangle AMN = \triangle AMO + \triangle MNO + \triangle NAO = \frac{1}{2} \times 4 \times t + \frac{1}{2} \times 6 \times t + \frac{1}{2} \times 4 \times t = 7t$ (cm^2)と表せる。よって，$7t = 3\sqrt{7}$ より，$t = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

(3) Ⅱ図において，点PからAMに垂線PIを下ろすと，$\angle PAI = \angle MAH$，$\angle PIA = \angle MHA = 90°$ より，△API∽△AMH　ここで，点Pを中心とする球の半径を $r$cm とすると，$PI = PQ = r$cm で，$QH = \frac{3\sqrt{7}}{7} \times 2 = \frac{6\sqrt{7}}{7}$ (cm)より，$AP = AH - PQ - QH = \sqrt{7} - r - \frac{6\sqrt{7}}{7} = \frac{\sqrt{7}}{7} - r$ (cm)　また，$MH = \frac{1}{2}MN = 3$ (cm)　よって，AP：PI = AM：MHより，$\left(\frac{\sqrt{7}}{7} - r\right) : r = 4 : 3$ なので，$4r = \frac{3\sqrt{7}}{7} - 3r$ となり，これを解いて，$r = \frac{3\sqrt{7}}{49}$　点Oを中心とする球の半径と点Pを中心とする球の半径の比は，$\frac{3\sqrt{7}}{7} : \frac{3\sqrt{7}}{49} = 7 : 1$ となるから，求める体積の比は，$7^3 : 1^3 = 343 : 1$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。